

REPRÉSENTATIONS p -ADIQUES D'UN CORPS LOCALPIERRE COLMEZ¹

ABSTRACT. We discuss applications of the theory of (φ, Γ) -modules to the study of p -adic representations of the Galois group of a local field and in particular to Iwasawa theory and explicit reciprocity laws.

NOTATIONS

On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de \mathbf{Q}_p et un système compatible $\varepsilon = (1, \varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}, \dots)$ de racines de l'unité avec $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ et $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$ si $n \in \mathbf{N}$ de telle sorte que $\varepsilon^{(n)}$ est une racine primitive p^n -ième de l'unité si $n \in \mathbf{N}$. Si K est une extension finie de \mathbf{Q}_p , on note \mathcal{G}_K le groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$ et $\mathcal{H}_K \subset \mathcal{G}_K$ le noyau du caractère cyclotomique χ . On pose aussi $\Gamma_K = \mathcal{G}_K/\mathcal{H}_K$ de telle sorte que Γ_K est le groupe de Galois de l'extension cyclotomique $K_\infty = \cup_{n \in \mathbf{N}} K_n$ de K , où l'on a noté K_n le corps $K(\varepsilon^{(n)})$ si $n \in \mathbf{N}$.

Un \mathbf{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action de \mathcal{H}_K (resp. \mathcal{G}_K) est appelé une représentation p -adique de \mathcal{H}_K (resp. \mathcal{G}_K). Si V est une représentation p -adique de \mathcal{G}_K et $k \in \mathbf{Z}$, on note $V(k)$ la tordue de V par la puissance k -ième du caractère cyclotomique.

I INTRODUCTION

Soit G un groupe topologique (comme \mathcal{H}_K ou \mathcal{G}_K). Pour mettre un peu d'ordre dans les représentations p -adiques de G , on dispose d'une stratégie, introduite et amplement utilisée par Fontaine, qui consiste à construire des \mathbf{Q}_p -algèbres topologiques munies d'une action continue de G et de structures additionnelles respectées par cette action. Chacune de ces algèbres B permet de découper dans l'ensemble des représentations p -adiques de G celles qui sont B -admissibles (i.e. qui deviennent triviales quand on étend les scalaires à B). Si V est une représentation B -admissible de \mathcal{G}_K , le B^G -module $(B \otimes V)^G$ est libre de rang $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$ et est muni de toutes les structures additionnelles de B respectées par l'action de \mathcal{G}_K . Ceci permet d'associer aux représentations de G des invariants plus maniables (en général des objets provenant de l'algèbre linéaire) et, si l'anneau B est assez fin (i.e. a suffisamment de structures respectées par G), de classifier les représentations B -admissibles en termes de ces invariants. Cette approche a l'avantage de ramener l'étude de toutes les représentations B -admissibles à celle de l'anneau B .

¹Recherche financée par le C.N.R.S

Si on injecte dans cette stratégie l'idée, utilisée avec profit par Tate² et Sen³, selon laquelle on a intérêt⁴ à dévisser la situation en regardant \mathcal{G}_K comme une extension de Γ_K par \mathcal{H}_K et la théorie du corps des normes de Fontaine et Wintenberger⁵ qui associe à l'extension K_∞/K un corps local \mathbf{E}_K de caractéristique p , on aboutit à la théorie des (φ, Γ) -modules⁶. Le point crucial de cette théorie est que l'on peut reconstruire une représentation V de \mathcal{G}_K à partir de son (φ, Γ_K) -module $D(V)$ qui est a priori un objet beaucoup plus maniable⁷ et que l'on doit donc être capable de lire sur $D(V)$ toutes les propriétés de V . Dans ce texte, nous donnons quelques applications de ce principe et en particulier la construction d'une vaste généralisation de l'isomorphisme de Coleman et de l'exponentielle de Perrin-Riou qui devrait être utile pour l'étude des fonctions- L p -adiques des motifs.

II LES ANNEAUX $\tilde{\mathbf{E}}$ ET $\tilde{\mathbf{A}}^+$

Soit \mathbf{C}_p le complété de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour la topologie p -adique. Soit $\tilde{\mathbf{E}}$ l'ensemble des suites $x = (x^{(0)}, \dots, x^{(n)}, \dots)$ d'éléments de \mathbf{C}_p vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$. On munit $\tilde{\mathbf{E}}$ des lois $+$ et \cdot définies par $x + y = s$ où $s^{(n)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$ et $x \cdot y = t$, avec $t^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}$, ce qui fait de $\tilde{\mathbf{E}}$ un corps de caractéristique p algébriquement clos et complet pour la valuation $v_{\mathbf{E}}$ définie par $v_{\mathbf{E}}(x) = v_p(x^{(0)})$. On note $\tilde{\mathbf{E}}^+$ l'anneau des entiers de $\tilde{\mathbf{E}}$. Soit $\tilde{\mathbf{A}}^+ = W(\tilde{\mathbf{E}}^+)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\tilde{\mathbf{E}}^+$ ⁸. Si $x \in \tilde{\mathbf{E}}^+$, soit $[x]$ son représentant de Teichmüller dans $\tilde{\mathbf{A}}^+$. Notre système ε de racines de l'unité peut être vu comme un élément de $\tilde{\mathbf{E}}$, ce qui nous permet d'introduire les éléments $\pi = [\varepsilon] - 1$ et $\omega = \frac{\pi}{\varphi^{-1}(\pi)} = 1 + [\varepsilon^{\frac{1}{p}}] + \dots + [\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}]$ de $\tilde{\mathbf{A}}^+$. Tous les anneaux que nous aurons à considérer dans ce texte s'obtiennent à partir de l'anneau $\tilde{\mathbf{A}}^+$ en introduisant plus ou moins de dénominateurs en p ou ω et en complétant⁹.

²J. Tate, dans "Proc. of a conf. on local fields", Driebergen, 158-183, Springer 1967.

³S. Sen, Inv. Math. 62, 89-116, 1980.

⁴Si l'anneau B est assez gros, les représentations de \mathcal{H}_K sont automatiquement B -admissibles et on est ramené à étudier l'anneau $B^{\mathcal{H}_K}$. C'est ce qu'a remarqué Sen dans le cas $B = \mathbf{C}_p$.

⁵J.-P. Wintenberger, Ann. Sci. E.N.S. 16, 59-89, 1983.

⁶J.-M. Fontaine, dans "The Grothendieck Festschrift", vol II, 249-309, Birkhäuser 1991.

⁷C'est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps local de dimension 2 muni de deux opérateurs semi-linéaires commutant entre eux

⁸L'anneau $\tilde{\mathbf{E}}^+$ est habituellement noté R ou \mathcal{R} dans la théorie des périodes p -adiques et $\tilde{\mathbf{A}}^+$ est souvent noté \mathbf{A}_{inf}

⁹L'application qui à $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n [x_n]$ associe $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n x_n^{(0)}$ est un morphisme surjectif d'anneaux de $\tilde{\mathbf{A}}^+$ sur $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ dont le noyau est l'idéal engendré par ω qui est donc premier

III \mathbf{B}_{dR} ET LES REPRÉSENTATIONS DE DE RHAM

On note \mathbf{B}_{dR}^+ le complété de $\tilde{\mathbf{A}}^+ = \tilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$ pour la topologie ω -adique. Cet anneau peut aussi s'obtenir en complétant $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour une topologie adéquate¹⁰. L'anneau $\mathbf{B}_{\text{dR}} = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+[\frac{1}{\omega}]$ est le corps des fractions de \mathbf{B}_{dR}^+ et est muni d'une filtration décroissante stable par l'action de Galois et définie par $\text{Fil}^i \mathbf{B}_{\text{dR}} = \omega^i \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ si $i \in \mathbf{Z}$. La série $\log[\varepsilon] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \pi^n$ converge dans \mathbf{B}_{dR}^+ vers un élément que nous noterons t sur lequel $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit via la formule $\sigma(t) = \chi(\sigma)t$ et qui peut être vu comme un analogue p -adique de $2i\pi$. Si $x \in K_\infty((t))$ et $n \in \mathbf{N}$, alors la suite $\frac{1}{p^m} \text{Tr}_{K_m((t))/K_n((t))}(x)$ est stationnaire pour $m \geq n$ assez grand. On note $\mathbf{T}_{K,n}$ l'application de $K_\infty((t))$ dans $K_n((t))$ ainsi définie.

Si V est une représentation p -adique de \mathcal{G}_K , on note $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ le module $(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes V)^{\mathcal{G}_K}$. C'est un K -espace vectoriel de dimension finie muni d'une filtration décroissante par des sous- K -espaces vectoriels. Une représentation \mathbf{B}_{dR} -admissible de \mathcal{G}_K est dite "de de Rham". Les représentations de \mathcal{H}_K sont toutes \mathbf{B}_{dR} -admissibles et les applications $\mathbf{T}_{K,n}$ donnent une bonne idée de ce à quoi $\mathbf{B}_{\text{dR}}^{\mathcal{H}_K}$ ressemble.

PROPOSITION 1. $K_\infty((t))$ est dense dans $\mathbf{B}_{\text{dR}}^{\mathcal{H}_K}$ et $\mathbf{T}_{K,n}$ s'étend par continuité en une application \mathbf{Q}_p -linéaire de $\mathbf{B}_{\text{dR}}^{\mathcal{H}_K}$ dans $K_n((t))$.

IV \mathbf{B}_{cont} ET LES REPRÉSENTATIONS CRISTALLINES

On note \mathbf{A}_{max} le complété de $\tilde{\mathbf{A}}^+[\frac{\omega}{p}]$ pour la topologie p -adique et $\mathbf{B}_{\text{max}}^+ = \mathbf{A}_{\text{max}}[\frac{1}{p}]$. Comme l'idéal (p, ω) de $\tilde{\mathbf{A}}^+$ est stable par φ , l'action de φ s'étend par continuité à \mathbf{A}_{max} et $\mathbf{B}_{\text{max}}^+$ mais n'est plus une bijection et on pose $\mathbf{B}_{\text{cont}}^+ = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \varphi^n(\mathbf{B}_{\text{max}}^+)$. D'autre part, $\mathbf{B}_{\text{cont}}^+$ s'identifie naturellement à un sous-anneau de \mathbf{B}_{dR}^+ contenant t (on a $\varphi(t) = pt$) et on pose $\mathbf{B}_{\text{cont}} = \mathbf{B}_{\text{cont}}^+[1/t]$.

Si V est une représentation p -adique de \mathcal{G}_K , on note $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ le module $(\mathbf{B}_{\text{cont}} \otimes V)^{\mathcal{G}_K}$. C'est un $K \cap \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action de φ et $K \otimes_{K \cap \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}} \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ s'identifie à un sous- K -espace vectoriel de $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ et donc est muni d'une filtration décroissante. Une représentation \mathbf{B}_{cont} -admissible de \mathcal{G}_K est dite "cristalline". Une représentation de \mathcal{H}_K est "presque" \mathbf{B}_{cont} -admissible et même "presque" $\mathbf{B}_{\text{cont}}^{\varphi=1}$ -admissible et la proposition suivante nous donne une description de $\mathbf{B}_{\text{cont}}^{\mathcal{H}_K}$ dans le cas où K est non ramifié sur \mathbf{Q}_p .

PROPOSITION 2. Si K est non ramifié sur \mathbf{Q}_p et $x \in (\mathbf{B}_{\text{cont}}^+)^{\mathcal{H}_K}$, il existe une unique distribution μ sur \mathbf{Q}_p telle que l'on ait $x = \int_{\mathbf{Q}_p} [\varepsilon^x] \mu$. On dit que x est la transformée de Fourier de μ . D'autre part, si $n \geq 1$, alors $\mathbf{T}_{K,n}(x)$ est la transformée de Fourier de la restriction de μ à $p^{-n}\mathbf{Z}_p$.

¹⁰On renvoie à *Périodes p -adiques* exposés II et III, Astérisque 223, 1994 pour les détails concernant cette section et la suivante.

V L'APPLICATION EXPONENTIELLE DE BLOCH-KATO

Les anneaux \mathbf{B}_{cont} et \mathbf{B}_{dR} sont reliés par la suite exacte fondamentale

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_p \longrightarrow \mathbf{B}_{\text{cont}}^{\varphi=1} \longrightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}/\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \longrightarrow 0.$$

Soient K une extension finie de \mathbf{Q}_p et V une représentation p -adique de \mathcal{G}_K . Tensorisant la suite exacte fondamentale avec V et prenant la suite exacte de cohomologie associée, on en déduit une application de $D_{\text{dR}}(V)$ dans $H^1(K, V)$ appelée exponentielle de Bloch-Kato¹¹ et notée \exp_V . Cette application se factorise à travers $D_{\text{dR}}(V)/\text{Fil}^0 D_{\text{dR}}(V)$ et son image est incluse dans le noyau $H_e^1(K, V)$ de l'application naturelle de $H^1(K, V)$ dans $H^1(K, \mathbf{B}_{\text{cont}}^{\varphi=1} \otimes V)$.

D'autre part, si V est de de Rham, l'image de \exp_V est $H_e^1(K, V)$ tout entier. et si $k \gg 0$, alors $\exp_{V(k)}$ est un isomorphisme de $D_{\text{dR}}(V(k))$ sur $H^1(K, V(k))$. Par dualité, on définit¹² une application $\exp_V^* : H^1(K, V^*(1)) \rightarrow D_{\text{dR}}(V^*(1))$.

VI LES ANNEAUX \mathbf{E} , \mathbf{A} ET \mathbf{B}

On note $\tilde{\mathbf{A}}$ le complété de $\tilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$ pour la topologie p -adique. L'anneau $\tilde{\mathbf{A}}$ est aussi l'anneau $W(\tilde{\mathbf{E}})$ des vecteurs de Witt à coefficients dans $\tilde{\mathbf{E}}$ et $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{A}}[\frac{1}{p}]$ en est le corps des fractions. Si K est une extension finie de \mathbf{Q}_p , les anneaux $\tilde{\mathbf{E}}_K = \tilde{\mathbf{E}}^{\mathcal{H}_K}$, $\tilde{\mathbf{A}}_K = \tilde{\mathbf{A}}^{\mathcal{H}_K}$ et $\tilde{\mathbf{B}}_K = \tilde{\mathbf{B}}^{\mathcal{H}_K}$ ont des structures un peu désagréables, ce qui a amené Fontaine à introduire des sous-anneaux \mathbf{E} , \mathbf{A} et \mathbf{B} ¹³ de $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}$ respectivement qui sont stables par φ et $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Si K est une extension finie de \mathbf{Q}_p , on pose¹⁴ $\mathbf{E}_K = \mathbf{E}^{\mathcal{H}_K}$, $\mathbf{A}_K = \mathbf{A}^{\mathcal{H}_K}$ et $\mathbf{B}_K = \mathbf{B}^{\mathcal{H}_K}$.

PROPOSITION 3. (i) \mathbf{B} est un corps valué complet dont $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cap \tilde{\mathbf{A}}$ est l'anneau des entiers et \mathbf{E} est le corps résiduel. De plus \mathbf{E} est la clôture séparable de $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{F}_p((\varepsilon - 1))$ dans $\tilde{\mathbf{E}}$ et $\text{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_K) = \mathcal{H}_K$ si K est une extension finie de \mathbf{Q}_p .

(ii) \mathbf{E}_K est un corps local de caractéristique p , $\tilde{\mathbf{E}}_K$ est le complété de sa clôture radicielle et \mathbf{B}_K est un corps local de dimension 2 dont \mathbf{A}_K est l'anneau des entiers et \mathbf{E}_K le corps résiduel.

Le lien entre $\varphi^{-n}(\mathbf{E}_K)$ et $\tilde{\mathbf{E}}_K$ ou $\varphi^{-n}(\mathbf{B}_K)$ et $\tilde{\mathbf{B}}_K$ est à peu près le même que celui entre $K_n((t))$ et $\mathbf{B}_{\text{dR}}^{\mathcal{H}_K}$ comme le montre la proposition 7. En particulier, les applications $T_{K,n} : \mathbf{B}_{\text{dR}}^{\mathcal{H}_K} \rightarrow K_n((t))$ de la proposition 1 ont des analogues¹⁵ très utiles pour démontrer le théorème 8 par exemple.

¹¹S. Bloch et K. Kato, dans "The Grothendieck Festschrift", vol. I, 333-400, Birkhäuser 1990.

¹²Cette définition de l'exponentielle duale est un peu détournée, mais K. Kato (Springer Lect. Notes 1553, 50-163, 1993), en a trouvé une construction directe.

¹³Il les note respectivement E^{sep} , $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ et $\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}$.

¹⁴ \mathbf{E}_K est le corps des normes de l'extension K_{∞}/K et la théorie du corps des normes est l'ingrédient principal de la démonstration de la proposition 3.

¹⁵Du point de vue des distributions (cf. prop. 2), passer de $\tilde{\mathbf{B}}$ à \mathbf{B} revient à ne regarder que les distributions à support dans \mathbf{Z}_p qui a le bon goût d'être compact.

VII LE (φ, Γ_K) -MODULE ASSOCIÉ À UNE REPRÉSENTATION DE \mathcal{G}_K

L'image de $H^1(\mathcal{H}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{F}_p))$ dans $H^1(\mathcal{H}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{E}))$ est triviale d'après le théorème de Hilbert 90. Un petit argument de dévissage permet d'en déduire que l'image de $H^1(\mathcal{H}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{Z}_p))$ dans $H^1(\mathcal{H}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}))$ est triviale puis que l'image de $H^1(\mathcal{H}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{Q}_p))$ dans $H^1(\mathcal{H}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}))$ est triviale. On obtient donc la proposition suivante.

PROPOSITION 4. *Toute représentation p -adique de \mathcal{H}_K est \mathbf{B} -admissible.*

Cette proposition peut être grandement précisée grâce à l'introduction des notions de φ -module et de (φ, Γ) -module.

DÉFINITION 5. Soit K une extension finie de \mathbf{Q}_p .

- (i) On appelle φ -module sur \mathbf{B}_K tout \mathbf{B}_K -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire de φ .
- (ii) On dit qu'un φ -module est étale ou de pente 0 s'il possède une base sur \mathbf{B}_K dans laquelle la matrice de φ appartient à $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_K)$.
- (iii) On appelle (φ, Γ_K) -module sur \mathbf{B}_K tout \mathbf{B}_K -espace vectoriel de dimension finie muni d'actions semi-linéaires de Γ_K et φ commutant entre elles. On dit qu'un (φ, Γ_K) -module est étale ou de pente 0 s'il l'est en tant que φ -module.

Si K est une extension finie de \mathbf{Q}_p et V est une représentation p -adique de \mathcal{H}_K , on pose $D(V) = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathcal{H}_K}$. L'action de φ sur \mathbf{B} commutant à celle de \mathcal{G}_K , $D(V)$ est muni d'une action de φ . Si de plus V est la restriction à \mathcal{H}_K d'une représentation de \mathcal{G}_K , le module $D(V)$ est muni d'une l'action résiduelle de $\mathcal{G}_K/\mathcal{H}_K = \Gamma_K$ qui commute à celle de φ .

PROPOSITION 6. *L'application qui à V associe $D(V)$ est une équivalence¹⁶ de catégories de la catégorie des représentations p -adiques de \mathcal{H}_K (resp. \mathcal{G}_K) sur celle des φ -modules (resp. (φ, Γ) -modules) étales sur \mathbf{B}_K .*

VIII \mathbf{B}^\dagger ET LES REPRÉSENTATIONS SURCONVERGENTES

Si $n \in \mathbf{N}$, on note $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, n}$ le complété de $\tilde{\mathbf{A}}^+[\frac{p}{\omega^{p^n}}]$ pour la topologie p -adique et $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, n} = \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, n}[\frac{1}{p}]$. Ces anneaux s'identifient à des sous-anneaux de $\tilde{\mathbf{B}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}^\dagger = \cup_{n \in \mathbf{N}} \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, n}$ est un sous-corps de $\tilde{\mathbf{B}}$ stable par φ . Si $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\tilde{\mathbf{A}}^+$ tendant p -adiquement vers 0, alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{-n}(a_k) (\frac{p}{\varphi^{-n}(\omega)^{p^n}})^k$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, ce qui nous permet de définir un morphisme¹⁷ d'anneaux φ^{-n} de $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, n}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ qui est injectif et commute à l'action de Galois.

¹⁶Comme $\mathbf{B}^{\varphi=1} = \mathbf{Q}_p$, si V est une représentation p -adique de \mathcal{G}_K , alors $(\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{B}_K} D(V))^{\varphi=1}$ est canoniquement isomorphe à V en tant que représentation de \mathcal{G}_K

¹⁷Ce morphisme permet de relier les invariants de V obtenus via la théorie des (φ, Γ) -modules à ceux obtenus via les anneaux des périodes p -adiques; c'est ce qui justifie l'introduction de la notion de représentation surconvergente.

On définit un sous-corps \mathbf{B}^\dagger de \mathbf{B} stable par φ et $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et, si $n \in \mathbf{N}$, un sous-anneau $\mathbf{B}^{\dagger,n}$ de \mathbf{B} stable par \mathcal{G}_K en posant $\mathbf{B}^\dagger = \mathbf{B} \cap \tilde{\mathbf{B}}^\dagger$ et $\mathbf{B}^{\dagger,n} = \mathbf{B} \cap \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$. Finalement, si K est une extension finie de \mathbf{Q}_p , on pose $\mathbf{B}_K^\dagger = (\mathbf{B}^\dagger)^{\mathcal{H}_K}$ et $\mathbf{B}_K^{\dagger,n} = (\mathbf{B}^{\dagger,n})^{\mathcal{H}_K}$. Les éléments de \mathbf{B}_K^\dagger peuvent se décrire en termes de séries de Laurent surconvergentes et on a le résultat suivant.

PROPOSITION 7. *Si K est une extension finie de \mathbf{Q}_p et si n est assez grand, alors $\varphi^{-n}(\mathbf{B}_K^{\dagger,n}) \subset K_n((t))$.*

Si V est une représentation p -adique de \mathcal{H}_K , on pose $D^\dagger(V) = (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_K}$ et $D^{\dagger,n}(V) = (\mathbf{B}^{\dagger,n} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_K}$ si $n \in \mathbf{N}$. Une représentation de \mathcal{H}_K qui est \mathbf{B}^\dagger -admissible est dite “surconvergente”. On peut trouver des représentations de \mathcal{H}_K qui ne sont pas surconvergentes (c’est même le cas général), mais on a le théorème suivant¹⁸ qui montre que l’on n’a pas besoin d’introduire trop de dénominateurs (en π ou ω) pour décrire les représentations \mathcal{G}_K .

THÉORÈME 8. *Si K est une extension finie de \mathbf{Q}_p , toute représentation p -adique de \mathcal{G}_K est surconvergente.*

IX \mathbf{B}^+ ET LES REPRÉSENTATIONS DE HAUTEUR FINIE

On pose $\tilde{\mathbf{B}}^+ = \tilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$ et $\mathbf{B}^+ = \mathbf{B} \cap \tilde{\mathbf{B}}^+$. Si V est une représentation p -adique de \mathcal{G}_K , on pose $D^+(V) = (\mathbf{B}^+ \otimes V)^{\mathcal{H}_K}$ et on dit¹⁹ que V est “de hauteur finie” si on n’a pas besoin de dénominateurs pour la décrire, c’est-à-dire si $D^+(V)$ contient une base de $D(V)$ sur \mathbf{B}_K .

Un telle représentation est particulièrement sympathique et, dans le cas où K est non ramifié, on a le résultat suivant²⁰ qui avait été conjecturé par Fontaine.

THÉORÈME 9. *Si K est non ramifié²¹ sur \mathbf{Q}_p , toute représentation cristalline de \mathcal{G}_K est de hauteur finie.*

¹⁸F. Cherbonnier et P. Colmez, Représentations p -adiques surconvergentes, Inv. Math. Le point de départ de la démonstration est le résultat de Sen (*loc. cit.*) qui permet de montrer que toute représentation de \mathcal{H}_K est $\tilde{\mathbf{B}}^\dagger$ -admissible. Pour redescendre de $\tilde{\mathbf{B}}^\dagger$ à \mathbf{B}^\dagger , on utilise les opérateurs $T_{K,n}$ et une étude fine de l’action de Γ_K sur $\tilde{\mathbf{B}}_K^\dagger$.

¹⁹N. Wach, Bull. de la S.M.F. 124, 375-400, 1996.

²⁰P. Colmez, Représentations cristallines et représentations de hauteur finie, 1997. La démonstration qui se trouve dans cette prépublication est très tortueuse. Une démonstration plus directe fournissant une description de $D^+(V)$ serait la bienvenue; cela a été fait par N. Wach (*loc. cit.*) dans le cas où la longueur de la filtration de $D_{\text{cris}}(V)$ est inférieure ou égale à $p-1$.

²¹Cette hypothèse peut être remplacée par K_∞ non ramifié sur $\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})$, mais ne peut être totalement supprimée : il existe des représentations cristallines qui ne sont pas de hauteur finie. D’autre part, on dispose d’un critère simple portant sur l’action de Γ_K sur $D^+(V)$ pour qu’une représentation de hauteur finie soit cristalline (Wach (*loc. cit.*)).

X MODULES D'IWASAWA ASSOCIÉS À UNE REPRÉSENTATION p -ADIQUE

Si V est une représentation p -adique de \mathcal{G}_K , on note $H_{\text{Iw}}^i(K, V)$ le groupe de cohomologie continue $H^i(\mathcal{G}_K, \mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]] \otimes V)$. On peut aussi voir $\mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]] \otimes V$ comme l'ensemble des mesures sur Γ_K à valeurs dans V et comme l'application $\mu \rightarrow \chi(x)^k \mu$ est un isomorphisme \mathcal{G}_K -équivariant de $\mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]] \otimes V$ sur $\mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]] \otimes V(k)$, on en déduit des isomorphismes $H_{\text{Iw}}^i(K, V(k)) \cong H_{\text{Iw}}^i(K, V)$ et des applications²² $\mu \rightarrow \int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^k \mu$ de $H_{\text{Iw}}^i(K, V)$ dans $H^i(K_n, V(k))$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$.

Les groupes $H_{\text{Iw}}^i(K, V)$ ont été étudiés en détail par Perrin-Riou²³. On a en particulier le résultat suivant.

PROPOSITION 10. *Soit V une représentation p -adique de \mathcal{G}_K .*

i) $H_{\text{Iw}}^i(K, V) = 0$ si $i \neq 1, 2$.

ii) $H_{\text{Iw}}^1(K, V)$ est un $\mathbf{Q}_p \otimes \mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]]$ -module de type fini dont le sous-module de torsion est naturellement isomorphe à $V^{\mathcal{H}_K}$ et $H_{\text{Iw}}^1(K, V)/V^{\mathcal{H}_K}$ est libre de rang $[K : \mathbf{Q}_p] \dim_{\mathbf{Q}_p} V$.

iii) $H_{\text{Iw}}^2(K, V)$ est isomorphe à $V(-1)^{\mathcal{H}_K}$ en tant que $\mathbf{Q}_p \otimes \mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]]$ -module; en particulier, il est de torsion.

XI LA MACHINE À FONCTIONS- L p -ADIQUES

Afin de mieux comprendre la construction par Coates et Wiles²⁴ de la fonction- L p -adique d'une courbe elliptique à multiplication complexe à partir des unités elliptiques, Coleman²⁵ a montré comment associer à tout $u \in \varprojlim_{K_n} \mathcal{O}_{K_n}^*$ une mesure λ_u sur \mathbf{Z}_p^* dans le cas où K est non ramifié sur \mathbf{Q}_p . L'application qui à u associe λ_u est presque un isomorphisme de $\mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]]$ -modules et est appelé l'isomorphisme de Coleman. Si on prend pour u le système des unités cyclotomiques, la mesure λ_u que l'on obtient donne la fonction zêta de Kubota-Leopoldt. Quand on a la chance de disposer d'une telle construction pour une fonction- L p -adique, il y a toujours des retombées arithmétiques spectaculaires et il semble donc intéressant d'essayer de généraliser la construction de Coleman à d'autres représentations que $\mathbf{Q}_p(1)$ ²⁶. Cela a été fait par Perrin-Riou²⁷ dans le cas d'une représentation cristalline d'une extension non ramifiée de \mathbf{Q}_p , ce qui lui a permis²⁸ de donner une définition (conjecturale) de la fonction- L p -adique d'un motif ayant bonne réduction en p . Sa construction repose sur une interpolation p -adique des exponentielles de Bloch-Kato

²²Utilisant ces applications, on montre que $H_{\text{Iw}}^i(K, V)$ est isomorphe à $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim_{K_n} H^i(K_n, T)$, où T est un \mathbf{Z}_p -réseau de V stable par \mathcal{G}_K et la limite projective est prise relativement aux applications de corestriction. On retombe donc sur la définition usuelle des modules d'Iwasawa.

²³B. Perrin-Riou, *Inv. Math.* 115, 81-149, 1994

²⁴J. Coates et A. Wiles, *J. Australian Math. Soc.*, A 26, 1-25, 1978

²⁵R. Coleman, *Inv. Math.* 53, 91-116, 1979

²⁶La théorie de Kummer nous fournit une application δ de $\varprojlim_{K_n} \mathcal{O}_{K_n}^*$ dans $H_{\text{Iw}}^1(K, \mathbf{Q}_p(1))$

²⁷*loc. cit.*

²⁸B. Perrin-Riou, *Astérisque* 229, 1995

pour les représentations $V(k)$ avec $k \in \mathbf{Z}$ et fournit une application “exponentielle” qui, dans le cas de $\mathbf{Q}_p(1)$ donne l’inverse de l’isomorphisme de Coleman. Dans la suite de ce texte, nous allons présenter deux généralisations de sa construction.

XII L’APPLICATION LOGARITHME

Soit V une représentation de de Rham telle que $(\mathbf{B}_{\text{cont}}^{\varphi=1} \otimes V)^{\mathcal{G}_{K_n}} = \{0\}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}^{29}$. Notons $H_{\text{Iw},e}^1(K, V)$ le sous-ensemble des éléments μ de $H_{\text{Iw}}^1(K, V)$ tels que $\int_{\Gamma_{K_n}} \mu \in H_e^1(K_n, V)$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. L’ensemble $H_{\text{Iw},e}^1(K, V)$ peut très bien être réduit à 0, mais il existe $k(V) \in \mathbf{Z}$ tel que l’on ait $H_{\text{Iw},e}^1(K, V) = H_{\text{Iw}}^1(K_n, V(k))$ si $k \geq k(V)$.

Si $\mu \in H_{\text{Iw},e}^1(K, V)$ et $\tau \rightarrow \mu_\tau$ est un cocycle continu représentant μ , il existe, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, un élément $c_n \in \mathbf{B}_{\text{cont}}^{\varphi=1} \otimes V$ tel que l’on ait $(1 - \tau)c_n = \int_{\Gamma_{K_n}} \mu_\tau$ quel que soit $\tau \in \mathcal{G}_{K_n}$. L’élément c_n est bien déterminé grâce à l’hypothèse faite sur V .

THÉORÈME 11. *Si $\mu \in H_{\text{Iw},e}^1(K, V)$, alors la suite de terme général $p^n c_n$ converge dans $\mathbf{B}_{\text{cont}}^{\varphi=1} \otimes V$ vers un élément de $(\mathbf{B}_{\text{cont}}^{\varphi=1} \otimes V)^{\mathcal{H}_K}$ qui ne dépend pas du choix du cocycle $\tau \rightarrow \mu_\tau$; il est noté $\text{Log}(\mu)$.*

Cette application logarithme³⁰ est une généralisation de l’isomorphisme de Coleman et, dans le cas où V est cristalline, est, à normalisation près, un inverse de l’application exponentielle introduite par Perrin-Riou. Plus précisément, utilisant la transformée de Fourier des distributions et les résultats de Perrin-Riou, on démontre le résultat suivant.

THÉORÈME 12. *Soit K une extension finie non ramifiée de \mathbf{Q}_p .*

(i) *Si V est une représentation cristalline de \mathcal{G}_K telle que $\text{Fil}^1 \text{D}_{\text{cris}}(V) = \{0\}$ et $\mu \in H_{\text{Iw},e}^1(K, V)$, alors il existe une (unique) distribution³¹ $\lambda_V(\mu)$ sur \mathbf{Q}_p à valeurs dans $\text{D}_{\text{cris}}(V)$ dont $\text{Log}_V(\mu)$ est la transformée de Fourier et si k est un entier suffisamment grand, alors*

$$\frac{1 - p^{-1}\varphi^{-1}}{1 - \varphi} \left(\int_{\mathbf{Z}_p^*} \frac{k!}{(-tx)^k} \lambda_V(\mu) \right) = \exp_{V(k)}^{-1} \left(\int_{\Gamma_K} \chi(x)^k \mu \right)$$

(ii) *Si $u \in \varprojlim \mathcal{O}_{K_n}^*$, la mesure λ_u que l’on obtient via l’isomorphisme de Coleman est la restriction à \mathbf{Z}_p^* de $\lambda_{\mathbf{Q}_p(1)}(\delta(u))$.*

²⁹Cette hypothèse n’est là que pour simplifier les énoncés qui suivent et devient automatique si on remplace V par $V(k)$ sauf pour un nombre fini de $k \in \mathbf{Z}$.

³⁰P. Colmez, Théorie d’Iwasawa des représentations de de Rham d’un corps local, Ann. of Math.

³¹L’existence de cette distribution traduit une propriété de continuité p -adique de l’application $k \rightarrow \exp_{V(k)}$. L’idée qu’une telle continuité devait exister a d’ailleurs été le point de départ de Perrin-Riou.

XIII LA LOI DE RÉCIPROCITÉ EXPLICITE DE PERRIN-RIOU

Revenons au cas où K est une extension finie quelconque de \mathbf{Q}_p et V une représentation de de Rham de \mathcal{G}_K . Si $n \in \mathbf{N}$, on étend l'application $\Gamma_{K,n}$ par linéarité en une application de $(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes V)^{\mathcal{H}_K} = \mathbf{B}_{\text{dR}}^{\mathcal{H}_K} \otimes D_{\text{dR}}(V)$ dans $K_n((t)) \otimes D_{\text{dR}}(V)$. Un élément x de $K_n((t)) \otimes D_{\text{dR}}(V)$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k \in \mathbf{Z}} \partial_k(x)t^k$ avec $\partial_k(x) \in K_n \otimes D_{\text{dR}}(V)$. Tout cela nous permet de définir pour chaque $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$, un morphisme $\text{CW}_{k,n}$ de $H_{\text{Iw},e}^1(K, V)$ dans $K_n \otimes D_{\text{dR}}(V)$ en posant

$$\text{CW}_{k,n}(\mu) = \partial_k(\Gamma_{K,n}(\text{Log}_V(\mu))).$$

Ces morphismes sont des généralisations des morphismes de Coates-Wiles et le théorème suivant montre qu'ils sont liés aux exponentielles de Bloch-Kato.

THÉORÈME 13. *Si $\mu \in H_{\text{Iw},e}^1(K, V)$, si $n \in \mathbf{N}$ et si $k \in \mathbf{Z}$, alors*

$$\text{CW}_{k,n}(\mu) = -\exp_{V^*(1+k)}^* \left(\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-k} \mu \right).$$

Si on suppose K non ramifié sur \mathbf{Q}_p et V cristalline, on peut retraduire ce théorème en termes de distributions et on obtient la proposition suivante qui est une des formes équivalentes de la loi de réciprocité conjecturée par Perrin-Riou³².

PROPOSITION 14. *Sous les hypothèses du théorème 12, si $k \gg 0$, alors*

$$\frac{1 - p^{-1}\varphi^{-1}}{1 - \varphi} \left(\int_{\mathbf{Z}_p^*} \frac{(tx)^k}{(k-1)!} \lambda_V(\mu) \right) = -\exp_{V^*(1+k)}^* \left(\int_{\Gamma_K} \chi(x)^{-k} \mu \right)$$

XIV (φ, Γ) -MODULES ET COHOMOLOGIE GALOISIENNE

Le corps \mathbf{B} est une extension de degré p de $\varphi(\mathbf{B})$, (totalement ramifiée car l'extension résiduelle est radicielle). Ceci nous permet de définir une application $\psi : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ par la formule $\psi(x) = \varphi^{-1}(\text{Tr}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}(x))$. Ceci fait de ψ un inverse à gauche de φ qui commute à l'action de \mathcal{G}_K .

Soient K une extension finie de \mathbf{Q}_p et Δ_K le sous-groupe de torsion de Γ_K de telle sorte que $\Gamma'_K = \Gamma_K/\Delta_K$ est isomorphe à \mathbf{Z}_p . Soit γ un générateur de Γ'_K . Si V est une représentation p -adique de \mathcal{G}_K , soit $D'(V) = D(V)^{\Delta_K}$. Considérons le complexe

$$0 \rightarrow D'(V) \rightarrow D'(V) \oplus D'(V) \rightarrow D'(V) \rightarrow 0,$$

où les applications de $D'(V)$ dans $D'(V) \oplus D'(V)$ et de $D'(V) \oplus D'(V)$ dans $D'(V)$ sont respectivement définies par $x \rightarrow ((\psi - 1)x, (\gamma - 1)x)$ et $(a, b) \rightarrow (\gamma - 1)a - (\psi - 1)b$.

³²Cette loi est une généralisation de celle de Bloch-Kato pour $\mathbf{Q}_p(r)$; une démonstration complètement différente a été obtenue par Kato, Kurihara et Tsuji.

On a le résultat suivant³³

THÉORÈME 15. *Si $i \in \mathbf{N}$, le i -ème groupe de cohomologie du complexe ci-dessus s'identifie fonctoriellement au groupe de cohomologie galoisienne $H^i(K, V)$.*

XV (φ, Γ) -MODULES ET THÉORIE D'IWASAWA

Les résultats mentionnés ci-dessus mènent naturellement³⁴ à une description des groupes $H_{\text{Iw}}^i(K, V)$ en termes de $D(V)$.

THÉORÈME 16. *Soit V une représentation p -adique de \mathcal{G}_K .*

i) $H_{\text{Iw}}^1(K, V)$ s'identifie fonctoriellement à $D(V)^{\psi=1}$ via une application Exp^ .*

ii) $H_{\text{Iw}}^2(K, V)$ s'identifie fonctoriellement à $\frac{D(V)}{\psi-1}$.

Remarquons que l'on n'a fait aucune hypothèse restrictive sur V ou sur K pour définir Exp^* . Dans le cas où K est non ramifié sur \mathbf{Q}_p et $V = \mathbf{Q}_p(1)$, un petit calcul montre que $\text{Exp}^*(\delta(u))$ est la transformée de Fourier de la mesure $x\lambda_u$, ce qui permet de voir l'application Exp^* comme une vaste généralisation de l'isomorphisme de Coleman.

On peut utiliser le fait que toute représentation p -adique de \mathcal{G}_K est surconvergente pour relier³⁵, dans le cas des représentations de de Rham, les applications Exp^* et Log et retrouver les homomorphismes de Coates-Wiles généralisés via la théorie des (φ, Γ) -modules. De manière précise, on a la loi de réciprocité explicite suivante que l'on pourra comparer avec le théorème 13.

THÉORÈME 17. *Si K est une extension finie de \mathbf{Q}_p et V une représentation de de Rham de \mathcal{G}_K , il existe $n(V) \in \mathbf{N}$ tel que si $\mu \in H_{\text{Iw}}^1(K, V)$, alors $\text{Exp}^*(\mu) \in D^{\dagger, n(V)}(V)$ et si $n \geq n(V)$, on a l'égalité suivante dans $K_n((t)) \otimes D_{\text{dR}}(V)$*

$$p^{-n} \varphi^{-n} \left(\text{Exp}^*(\mu) \right) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \exp_{V^*(1+k)}^* \left(\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-k} \mu \right).$$

D.M.I., École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France
Institut de Mathématiques, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

³³L.Herr, *Cohomologie Galoisienne des corps p -adiques*, thèse de l'université d'Orsay, 1995. Le point de départ de la démonstration est la suite exacte $0 \rightarrow \mathbf{Q}_p \rightarrow \mathbf{B}^{1-\varphi} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow 0$. La thèse de Herr contient en outre une démonstration du théorème de dualité locale via la théorie des (φ, Γ) -modules dont l'ingrédient principal est une description de l'isomorphisme canonique $H^2(K, \mathbf{Q}_p(1)) \cong \mathbf{Q}_p$ grâce à une application résidu.

³⁴Il s'agit d'un résultat non publié de J.-M. Fontaine; on en trouvera une démonstration dans F. Cherbonnier et P. Colmez, *Théorie d'Iwasawa des représentations p -adiques d'un corps local*, Journal de l'A.M.S.

³⁵Cette comparaison est d'ailleurs le point de départ de la démonstration du théorème 9. D. Benois a entrepris le chemin inverse et obtenu (On Iwasawa theory of crystalline representations, preprint 1998) une démonstration de la loi de réciprocité explicite de Perrin-Riou via la théorie des (φ, Γ) -modules dans le cas des représentations cristallines de hauteur finie.